

# 基于边界积分方程方法的可穿透非均匀介质 反散射中的传输特征值问题\*

郑秋燕, 刘立汉, 陈容

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

**摘要:** 利用边界积分方程方法研究了可穿透非均匀介质反散射中的传输特征值问题。首先, 根据可穿透非均匀介质反散射中传输特征值问题的特征, 构造 Robin-Dirichlet 算子, 并用边界积分算子表示 Robin-Dirichlet 算子。然后, 由格林公式、Fredholm 变换和迹定理, 证明了一种算子的强制性。其次, 应用紧嵌入定理和 Lax-Milgram 定理, 证明了另一种算子的紧性。最后, 结合两种算子的性质, 证明了 Robin-Dirichlet 算子的差算子是指数为 0 的 Fredholm 算子且解析。

**关键词:** 边界积分方程方法; 传输特征值问题; Robin-Dirichlet 算子; Fredholm 算子

**中图分类号:** O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2022)03-0181-08

## A boundary integral equation method for transmission eigenvalue problems in penetrable inhomogeneous media

ZHENG Qiuyan, LIU Lihan, CHEN Rong

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

**Abstract:** The transmission eigenvalue problems in inverse scattering of penetrable inhomogeneous media is studied by using a boundary integral equation method. Firstly, the Robin-Dirichlet operator is constructed from the transmission eigenvalue problems in inverse scattering of penetrable inhomogeneous media, and the Robin-Dirichlet operator is represented by the boundary integral operator. Secondly, the coerciveness of an operator is proved by the Green's formula, Fredholm alternative and the trace theorem. Thirdly, the compact embedding theorem and Lax-Milgram theorem are applied to prove the compactness of another operator. Finally, combining the properties of the two operators, it is proved that the difference operator of the Robin-Dirichlet operator is an analytic Fredholm operator whose exponent is 0.

**Key words:** a boundary integral equation method; transmission eigenvalue problems; Robin-Dirichlet operator; Fredholm operator

\* 收稿日期: 2021-02-01 录用日期: 2021-04-03 网络首发日期: 2022-03-24

**基金项目:** 国家自然科学基金青年科学基金(12001075); 重庆市自然科学基金面上项目(cstc2020jcyj-msxmX0167); 重庆市教委科学技术研究项目(KJZD-K202100503, KJQN201900544); 重庆市留学人员回国创新类项目(cx2021061, cx2019022); 重庆市巴渝学者计划(BYQNCS2020002); 重庆师范大学青年拔尖人才培养计划(02030307/0052); 重庆市高校创新研究群体项目(CXQT20014)

**作者简介:** 郑秋燕(1996年生), 女; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 1326189168@qq.com

**通信作者:** 刘立汉(1987年生), 男; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: mathsedu2013@163.com

在声波和电磁波的反散射问题中, 传输特征值的性质可以用来估计散射体材料的性质, 并且此时的传输特征值问题是椭圆方程特征值问题的标准理论所没有包含的非线性、非自伴随特征值问题。因此, 对反散射问题中的传输特征值的研究, 引起了国内外许多学者的兴趣和关注, 也成为近年来一个非常活跃的研究热点, 有关这方面的详细综述见文献[1-6]。目前已经研究了一些关于传输特征值的性质, 包括传输特征值的离散性<sup>[7-8]</sup>、实传输特征值的存在性<sup>[7,9]</sup>、传输特征值在复平面的位置<sup>[10]</sup>和传输特征值在多种假设下的一般光谱性<sup>[11-12]</sup>等。同时, 也涌现一些研究传输特征值问题的数学方法, 包括变分法<sup>[7,13]</sup>、边界积分方程方法<sup>[11,14-16]</sup>和半经典分析<sup>[12,17]</sup>。尤其文献[18-19]指出, 从散射数据中可以确定传输特征值, 并根据折射率可以建立传输特征值的单调性, 这使得传输特征值问题的性质分析能够作为反散射问题研究的关键点。

本文利用边界积分方程方法研究了可穿透非均匀介质反散射中的传输特征值问题。边界积分方程方法首先是由 Cossonnière 和 Haddar 在传输特征值问题中使用, 他们是利用格林公式对传输特征函数进行作用, 然后推导出一个与传输特征值问题等价的线性边界积分方程组, 且线性边界积分方程组是由两个边界积分方程构成, 其对应于依赖非线性特征值参数  $k$  的二乘二矩阵值算子。而本文则是只有一个线性边界积分方程, 也非线性依赖于特征值参数  $k$ , 很大程度上减少了计算量。

本文首先根据传输特征值问题构造 Robin-Dirichlet 算子, 得到  $k$  是传输特征值的充要条件是 Robin-Dirichlet 算子在任意折射率  $n$  和特殊折射率  $n = 1$  时的差算子  $P(k; \eta)$  的核是非平凡的, 并用边界积分算子表示 Robin-Dirichlet 算子, 从而得到与传输特征值问题等价的边界积分方程。然后, 为证明算子  $P(k; \eta)$  是指数为 0 的 Fredholm 算子且解析, 于是由格林公式、Fredholm 变换和迹定理, 证明了一种算子的强制性。其次, 应用紧嵌入定理、Lax-Milgram 定理, 证明了另一种算子的紧性。最后, 结合两种算子的性质, 证明了算子  $P(k; \eta)$  是指数为 0 的 Fredholm 算子且解析。

## 1 可穿透非均匀介质反散射中的传输特征值问题

在可穿透非均匀介质反散射中, 如果  $n$  表示具有支集  $D \in \mathbb{R}^m (m = 2, 3)$  的可穿透非均匀介质的折射率, 假设  $n$  为常数且  $0 < n \neq 1$ , 令  $k_n = k\sqrt{n}$ . 为找到  $k \in \mathbb{C}$ , 考虑当  $w - v \in H^2(D)$  且存在非零的  $v \in L^2(D)$  和  $w \in L^2(D)$  满足方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot A \nabla w + k^2 n w = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} & (1) \\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} & (2) \\ w - v = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} & (3) \\ \frac{\partial w}{\partial \nu_A} - \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} & (4) \end{cases}$$

其中  $\frac{\partial w}{\partial \nu_A} = \nu \cdot A \nabla w$ ,  $D$  是有界的, 并具有连通补  $\mathbb{R}^m \setminus D$  和足够光滑的边界  $\partial D$ ,  $\nu$  表示向外单位法向量, 矩阵  $A \in L^\infty(D)$  是描述  $D$  的内部介质的物理性质, 且是  $m \times m$  维的对称矩阵值函数, 并满足  $\bar{\xi} \cdot \operatorname{Re}(A)\xi \geq \alpha \|\xi\|^2$ ,  $\bar{\xi} \cdot \operatorname{Im}(A)\xi \leq 0$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^m$ ,  $\alpha$  是正常数,  $\operatorname{Re}(A)$  表示矩阵值函数中每个元素的实部  $\operatorname{Re}(a_{ij})$ ,  $\operatorname{Im}(A)$  表示矩阵值函数中每个元素的虚部  $\operatorname{Im}(a_{ij})$ .

本文的目的是从传输特征值的表征形式推导积分方程, 因此根据方程组(1)~(4), 定义 Robin-Dirichlet 算子:

$$R_{k,n}: \varphi \mapsto u|_{\partial D}, \quad (5)$$

其中  $u \in L^2_\Delta$ ,  $L^2_\Delta(D) := \{u \in L^2(D): \Delta u \in L^2(D)\}$ , 并且  $u$  满足方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot A \nabla u + k^2 n u = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} & (6) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - i\eta u = \varphi, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} & (7) \end{cases}$$

其中  $\eta > 0$ ; 根据格林积分定理可知,  $\operatorname{Re}(k) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(k) \geq 0$  (如果  $\operatorname{Im}(k) < 0$ , 则可以在阻抗条件中用  $\eta <$

0代替)。

**引理 1**  $k$  是对应于方程组(1)~(4)的传输特征值当且仅当算子

$$P(k; \eta) := R_{k,1} - R_{k,n} \tag{8}$$

的核是非平凡的。进一步, 如果  $(R_{k,1} - R_{k,n})\varphi = 0$ , 那么传输特征值函数  $w, v$ , 即方程组(1)~(4)的非平凡解是方程组(6)~(7)中任意折射率  $n$  和特殊折射率  $n = 1$  的解。

**证明** 对  $n$  而言,  $R_{k,n}: \varphi \mapsto u|_{\partial D}$  满足方程组(6)~(7)。

对  $n = 1$  而言,  $R_{k,1}: \varphi \mapsto v|_{\partial D}$  满足方程组:

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} - i\eta v = \varphi, & \text{在 } \partial D \text{ 上.} \end{cases} \tag{9}$$

由式(7)和式(10)可知,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + i\eta(u - v), \quad \text{在 } \partial D \text{ 上.} \tag{11}$$

再由  $R_{k,n}: \varphi \mapsto u|_{\partial D}$  和  $R_{k,1}: \varphi \mapsto v|_{\partial D}$  可知,

$$u = v, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上.} \tag{12}$$

将式(12)代入式(11), 可得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上.} \tag{13}$$

因此, Robin-Dirichlet 算子以及方程组(6)~(7)与方程组(1)~(4)是等价的, 进而可以利用 Robin-Dirichlet 算子以及方程组(6)~(7)去考虑传输特征值问题, 得证。

为了用边界积分算子来表示 Robin-Dirichlet 算子, 引入单层势算子  $S_k$ :

$$(S_k \psi)(x) = 2 \int_{\partial D} \psi(y) \phi_k(x, y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D,$$

其中

$$\phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), & \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 中,} \\ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x - y|}}{|x - y|}, & \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中.} \end{cases}$$

如果  $\partial D$  是  $C^{1,1}$  光滑的, 线性算子  $S_k: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s+1}(D)$  在  $-1 \leq s \leq 1$  上是连续的<sup>[20]</sup>。进一步定义  $S_k$  在边界  $\partial D$  上的限制和法向导数:

$$(S_k \psi)(x) = 2 \int_{\partial D} \psi(y) \phi(x, y) ds_y, \quad x \in \partial D, \tag{14}$$

$$(K'_k \psi)(x) = 2 \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_{Ax}} \phi(x, y) ds_y, \quad x \in \partial D. \tag{15}$$

于是得到

$$S_k: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\partial D), \tag{16}$$

$$K'_k: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D). \tag{17}$$

$S_k$  和  $K'_k$  这两种算子在  $-1 \leq s \leq 1$  上同样连续。

由于前面提到的传输特征值问题的解  $w, v \in L^2_\Delta(D)$ , 因此它们的迹和法向导数在边界上分别属于  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  和  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$ 。如果  $u \in L^2_\Delta(D)$ , 那么它的迹  $u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  可以由以下对偶等式定义

$$\langle u, \tau \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D), H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = \int_D (u \Delta w - w \Delta u) dx,$$

其中  $w \in H^2(D)$ , 使得  $w = 0$  且  $\partial w / \partial \nu = \tau$ 。类似地,  $\partial u / \partial \nu_A \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  的迹可以由以下对偶等式定义:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu_A}, \tau \right\rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\partial D), H^{\frac{3}{2}}(\partial D)} = - \int_D (u \cdot \nabla \cdot A \nabla w - w \cdot \nabla \cdot A \nabla u) dx,$$

其中  $w \in H^2(D)$ , 使得  $w = \tau$  且  $\partial w / \partial \nu_A = 0$ .

因此, 为了用单层势方法去表示  $w$  和  $v$ , 密度必须属于  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 即  $s = -1$ . 明显地,  $S_k \psi$  算子满足 Helmholtz 方程, 于是得到  $S_k: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2_\Delta(D)$  是连续的. 更重要的是, 通过对偶论证, 可以将单层势在边界  $\partial D$  的跳跃关系扩展到密度较低的势的情况. 更具体地见以下引理.

**引理 2**<sup>[1]</sup> 单层势  $S_k: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2_\Delta(D)$  满足:

$$\begin{aligned} (S_k \psi)_{\partial D}^- &= S_k \psi, & \text{在 } H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \text{ 上,} \\ \left. \frac{\partial (S_k \psi)^-}{\partial \nu_A} \right|_{\partial D} &= K'_k \psi + \psi, & \text{在 } H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \text{ 上,} \end{aligned}$$

其中有界线性算子  $S_k: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ ,  $K'_k: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  分别由式(14)和式(15)给出. (算子的上标表示从  $D$  的内部靠近边界  $\partial D$ )

## 2 Robin-Dirichlet 算子的相关性质

**引理 3** 假设边界  $\partial D$  是  $C^{2,1}$  类, 则  $(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  和  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  在  $-1 \leq s \leq 1$  上都存在且有界.

**证明** 以  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}$  为例.

由于算子  $S_{k_n}$  是 -1 阶的拟微分算子, 算子  $K'_{k_n}$  是至少 -1 阶的拟微分算子 (事实上算子  $K'_{k_n}$  在  $\mathbb{R}^2$  上是 -3 阶). 因此, 算子  $S_{k_n}$  和  $K'_{k_n}$  在  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  上是紧算子. 于是算子  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n}): H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  是指数为 0 的 Fredholm 算子.

为证明算子  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}: H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  在  $-1 \leq s \leq 1$  上存在且有界, 需证明算子  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})$  在  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  中的核是平凡的.

于是考虑  $s = 0$ . 假设  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  是  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})$  的核, 那么  $u = S_{k_n} \varphi$  是 Helmholtz 方程的解,  $u \in H^1(D)$ , 并且满足以下方程 (迹从  $D$  的内部靠近边界  $\partial D$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - i\eta u = 0, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上.}$$

格林第一公式表明, 如果  $\text{Re}(k) > 0$ ,  $\text{Im}(k) \geq 0$ , 则  $u$  在  $D$  中  $u = 0$ . 另外, 根据单层势在  $\partial D$  上的跳跃关系知  $u = S_{k_n} \varphi$  是  $\partial D$  上满足  $u = 0$  的 Helmholtz 方程的辐射解,  $u$  属于  $H^1_{loc}(\mathbb{R}^m \setminus \bar{D})$ . 外部 Dirichlet 问题的唯一性<sup>[21]</sup> 表明  $u$  在  $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$  中等于 0. 根据  $S_{k_n} \varphi$  在  $\partial D$  上的法向导数的跳跃性, 得到  $\varphi = 0$ , 即  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})$  的核在  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  是平凡的. 由此, 在对偶系统中利用 Fredholm 变换<sup>[22]</sup>, 得到当  $-1 \leq s \leq 1$  时, 算子  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})$  的核在  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  中也是平凡的. 同理, 算子  $(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}$  的核在  $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$  中也是平凡的, 得证.

根据 Robin 问题:

$$\begin{aligned} \Delta u - u &= 0, & \text{在 } D \text{ 内,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + u &= 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上} \end{aligned}$$

的唯一性, 在  $k = i$  和  $\eta = i$  的情况下, 引理 3 同样成立.

通过以上分析, 可以用边界积分算子表示 Robin-Dirichlet 算子, 即:

$$\begin{aligned} R_k &= S_k (I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}, \\ R_{k_n} &= S_{k_n} (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}, \end{aligned}$$

其中用  $R_k$  和  $R_{k_n}$  分别表示  $R_{k,1}$  和  $R_{k,n}$ ,  $k_n = k\sqrt{n}$ .

进一步分析 Robin-Dirichlet 算子关于  $k, k_n$  的差:

$$P(k; \eta) = S_k (I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} - S_{k_n} (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}. \quad (18)$$

于是, 有以下正则性结论.

**引理4** 线性算子

$$\varphi \mapsto S_k(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}\varphi - S_{k_n}(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}\varphi, \tag{19}$$

从  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  映射到  $H^2(D)$ , 算子  $P(k; \eta): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 并且两个算子有界。

**证明** 设  $\varphi \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 定义

$$u = S_k(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}\varphi - S_{k_n}(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}\varphi. \tag{20}$$

将式(20)化为

$$u = S_k((I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} - (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1})\varphi - (S_{k_n} - S_k)(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}\varphi. \tag{21}$$

由文献[2]的定理3.2知,  $(S_{k_n} - S_k)$  是一个  $-\frac{7}{2}$  阶的拟微分算子, 于是有

$$(S_{k_n} - S_k): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^2(D),$$

并且根据引理3, 有算子  $(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}: H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial D)$ , 故得到算子

$$(S_{k_n} - S_k)(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^2(D). \tag{22}$$

现在将算子  $(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} - (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}$  化为如下形式

$$\begin{aligned} & (I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} - (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1} \\ &= (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}(I + K'_k - i\eta S_k - (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n}))(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} \\ &= (I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1}((K'_k - K'_{k_n}) - i\eta(S_k - S_{k_n}))(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1}. \end{aligned}$$

由于  $(S_{k_n} - S_k): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^2(D)$ , 于是根据迹定理以及在边界上的法向导数知

$$(S_{k_n} - S_k): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D), \tag{23}$$

$$(K'_k - K'_{k_n}): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D). \tag{24}$$

因此, 结合式(22)~(24)以及  $S_k: H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^2(D)$  是连续的, 可以得到式(21)的第一项也是从  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  连续映射到  $H^2(D)$ , 故得到算子  $u: H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^2(D)$  且有界。

最后, 由于  $P(k; \eta)$  是  $u$  在  $\partial D$  上的迹, 因此,  $P(k; \eta): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  且有界, 得证。

显然, 引理4在  $k$  是纯虚数和  $\eta = i$  情况下依然成立。

综上所述,  $\text{Re}(k) > 0$  且  $\text{Im}(k) \geq 0$  的  $k \in \mathbb{C}$  是传输特征值, 当且仅当由式(18)给出的  $P(k; \eta): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  的核是非平凡的。

**定理1** 对任意  $k > 0$ ,  $k_n = k \in \sqrt{n}$ ,  $\eta = i$ , 算子

$$(k_n^2 - k^2)P(ik; i): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$$

是强制性的。即对任意  $\varphi \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  和存在常数  $C > 0$ , 有

$$(k_n^2 - k^2)\langle P(ik; i)\varphi, \varphi \rangle_{H^{\frac{3}{2}}(\partial D), H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)} \geq C\|\varphi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)}^2.$$

**证明** 对任意  $u, v \in H^2(D)$ , 有

$$\begin{aligned} & \int_D v(\Delta - k^2)(\nabla \cdot A\nabla - k_n^2)u \, dx - \int_D \Delta v \cdot (\nabla \cdot A\nabla u) + k_n^2 \nabla u \cdot \nabla v + k^2 A\nabla u + k^2 k_n^2 u v \, dx \\ &= \int_D (v\Delta(\nabla \cdot A\nabla u) - \Delta v(\nabla \cdot A\nabla u)) \, dx - k_n^2 \int_D (v \cdot \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx - k^2 \int_D (v(\nabla \cdot A\nabla u) + \nabla v \cdot A\nabla u) \, dx. \end{aligned}$$

进一步利用格林公式, 得

$$\begin{aligned} & \int_D v(\Delta - k^2)(\nabla \cdot A\nabla - k_n^2)u \, dx - \int_D \Delta v \cdot (\nabla \cdot A\nabla u) + k_n^2 \nabla u \cdot \nabla v + k^2 A\nabla u + k^2 k_n^2 u v \, dx \\ &= \left( v \frac{\partial(\nabla \cdot A\nabla u)}{\partial \nu} - (\nabla \cdot A\nabla u) \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds - k_n^2 \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds - k^2 \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \, ds. \end{aligned} \tag{25}$$

在式子  $\int_D \Delta v \cdot (\nabla \cdot A\nabla u) + k_n^2 \nabla u \cdot \nabla v + k^2 A\nabla u + k^2 k_n^2 u v \, dx$  中, 令  $v = \bar{u}$ , 于是有

$$\int_D \Delta \bar{u} \cdot (\nabla \cdot A\nabla u) + k_n^2 |\nabla u|^2 + k^2 \nabla \bar{u} \cdot A\nabla u + k^2 k_n^2 |u|^2 \, dx \geq \tilde{c}\|u\|_{H^2(D)}^2, \tag{26}$$

其中任意  $u \in H^2(D)$ , 存在常数  $\tilde{c} > 0$ .

对任意  $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 令  $u = S_{ik}(I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} - S_{ik_n}(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1}$ . 由引理 4 可知,  $u \in H^2(D)$  有

$$\nabla \cdot A \nabla u = k^2 S_{ik}(I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - k_n^2 S_{ik_n}(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi.$$

进一步得到

$$(\Delta - k^2)(\nabla \cdot A \nabla - k_n^2)u = \Delta(\nabla \cdot A \nabla u) - k_n^2 v \cdot \Delta u - k^2 v(\nabla \cdot A \nabla u) + k^2 k_n^2 u = 0. \tag{27}$$

因此, 得到边界条件

$$u = S_{ik}(I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - S_{ik_n}(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi = P(ik; i) \varphi, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + u &= (I + K'_{ik}) \cdot (I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - (I + K'_{ik_n}) \cdot (I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi \\ &\quad + S_{ik}(I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - S_{ik_n}(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi \\ &= (I + K'_{ik} + S_{ik})(I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - (I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla \cdot A \nabla u)}{\partial \nu_A} + \nabla \cdot A \nabla u &= k^2(I + K'_{ik}) \cdot (I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - k_n^2(I + K'_{ik_n}) \cdot (I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi \\ &\quad + k^2 S_{ik}((I + K'_{ik} + S_{ik})^{-1} \varphi - k_n^2 S_{ik_n}(I + K'_{ik_n} + S_{ik_n})^{-1} \varphi \\ &= (k^2 - k_n^2) \varphi, \end{aligned} \tag{30}$$

这里令  $v = \bar{u}$ , 将式(27)~(30)代入式(25), 有

$$\begin{aligned} &-\int_D \Delta \bar{u} \cdot (\nabla \cdot A \nabla u) + k_n^2 |\nabla u|^2 + k^2 \nabla \bar{u} \cdot A \nabla u + k^2 k_n^2 |u|^2 dx \\ &= \int_{\partial D} (\bar{u} \frac{\partial(\nabla \cdot A \nabla u)}{\partial \nu} - (\nabla \cdot A \nabla u) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}) ds - k_n^2 \int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - k^2 \int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} ds \\ &= \int_{\partial D} (\bar{u}((k^2 - k_n^2) \varphi - \nabla \cdot A \nabla u) - (\nabla \cdot A \nabla u)(-\bar{u}) + (k^2 + k_n^2) \bar{u} \cdot u) ds \\ &= (k^2 - k_n^2) \int_{\partial D} \varphi \cdot \overline{P(ik; i) \varphi} ds + (k^2 + k_n^2) \int_{\partial D} |u|^2 ds. \end{aligned}$$

进一步有

$$(k_n^2 - k^2) \int_{\partial D} \varphi \cdot \overline{P(ik; i) \varphi} ds - (k^2 + k_n^2) \int_{\partial D} |u|^2 ds \geq \tilde{c} \|u\|_{H^2(D)}^2 \geq C \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial D)}^2.$$

因此有

$$(k_n^2 - k^2) \int_{\partial D} \varphi \cdot \overline{P(ik; i) \varphi} ds \geq C \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial D)}^2, \tag{31}$$

其中任意  $\varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  和存在常数  $C > 0$ .

**定理 2** 算子  $P(k; \eta) + \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} P(ikl; i): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是紧算子。

**证明** 对任意  $\varphi \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 定义

$$\begin{aligned} u &= S_k(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} \varphi - S_{k_n}(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1} \varphi, \\ u_i &= S_{ikl}(I + K'_{ikl} + S_{ikl})^{-1} \varphi - S_{ik_n l}(I + K'_{ik_n l} + S_{ik_n l})^{-1} \varphi. \end{aligned}$$

然后令  $U = u + \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} u_i$ ,  $U \in H^2(D)$ . 于是有

$$\begin{aligned} \Delta(\nabla \cdot A \nabla U) &= k^4 S_k(I + K'_k - i\eta S_k)^{-1} \varphi - k_n^2 S_{k_n}(I + K'_{k_n} - i\eta S_{k_n})^{-1} \varphi \\ &\quad + \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} (|k|^4 S_{ikl}(I + K'_{ikl} + S_{ikl})^{-1} \varphi - |k_n|^4 S_{ik_n l}(I + K'_{ik_n l} + S_{ik_n l})^{-1} \varphi). \end{aligned}$$

并且有

$$\Delta(\nabla \cdot A \nabla U) = F(u, u_i),$$

其中  $F(u, u_i) \in L^2(D)$ , 且

$$F(u, u_i) = -k^2 k_n^2 u - (k^2 + k_n^2) \nabla \cdot A \nabla u - \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} [ |k|^2 |k_n|^2 u_i - (|k|^2 + |k_n|^2) \nabla \cdot A \nabla u_i ].$$

进一步在边界  $\partial D$  上得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \nu_A} + U &= (1 + i\eta)u, \\ \frac{\partial(\nabla \cdot A \nabla U)}{\partial \nu_A} + \nabla \cdot A \nabla U &= (1 + i\eta) \nabla \cdot A \nabla u. \end{aligned}$$

由引理4可知,  $u$  在  $\partial D$  上的迹在  $H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  中,  $u$  在  $\partial D$  上的  $\nabla \cdot A \nabla u$  在  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  中, 其对应的映射从  $\varphi \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  到迹是有界的。根据标准椭圆理论, 即 Lax-Milgram 定理, 对于任意  $F \in L^2(D)$  和  $g = (1 + i\eta) \nabla \cdot A \nabla u|_{\partial D} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ , 存在唯一解  $V \in H^1(D)$  满足

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A \nabla V &= F, \quad \text{在 } D \text{ 内,} \\ \frac{\partial V}{\partial \nu_A} + V &= g, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上,} \end{aligned}$$

且映射  $(F, g) \mapsto V$  从  $L^2(D) \times H^{-1/2}(\partial D)$  到  $H^1(D)$  是连续映射<sup>[23]</sup>, 那么  $w = V - \nabla \cdot A \nabla U$  是调和的, 且属于  $L^2_\Delta(D)$ , 并在  $\partial D$  上满足  $\partial_{\nu_A} w + w = 0$ .

因此, 根据格林公式, 迹  $w|_{\partial D} \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  是  $(I + K'_0 + S_0)$  在  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  中的核, 其中  $K'_0$  和  $S_0$  当  $k = 0$  时式(14)和式(15)给出的边界积分算子。

由引理3知, 算子  $(I + K'_0 + S_0)$  的核是平凡的, 于是  $\nabla \cdot A \nabla U = V$ . 因此,  $\nabla \cdot A \nabla U$  属于  $H^1(D)$  且线性算子从  $\varphi \in H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  映射到  $\nabla \cdot A \nabla U \in H^1(D)$  是有界的。

现在应用正则性结果,  $v \in H^1(D)$  是  $\Delta v - v = G$  在  $D$  中的解,  $G \in H^1(D)$ , 在边界上满足 Neumann 边界条件:  $\partial_\nu v = g$ ,  $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 则  $v \in H^3(D)$ , 且  $(G, g) \mapsto v$  从  $H^1(D) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  到  $H^3(D)$  是连续映射<sup>[23]</sup>, 鉴于映射  $\varphi \mapsto u|_{\partial D}$  从  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  到  $H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  的有界性。

对  $v = U$  应用正则性结果, 则  $U \in H^3(D)$ , 且  $\varphi \mapsto U$  从  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  到  $H^3(D)$  是有界的。因此, 映射  $\varphi \mapsto U|_{\partial D}$  从  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial D)$  到  $H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是有界的。

而  $U|_{\partial D} = P(k; \eta) + \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} P(ikl; i)$  是从  $H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  紧嵌入到  $H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$ , 得证。

总之, 定理1和定理2给出下面的结果, 特别地, 可以从中得到在折射率为常数的特殊情况下, 重新建立传输特征值的离散性。

**定理3** 当  $k \in \mathbb{C}$ , 且  $\operatorname{Re}(k) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(k) \geq 0$  时,  $P(k; \eta): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是指数为0的 Fredholm 算子且解析。

**证明** 由定理1知,  $(k_n^2 - k^2)P(ikl; i): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是强制性的, 即是可逆有界的。且由定理2可知,  $P(k; \eta) + \frac{k^2 - k_n^2}{|k|^2 - |k_n|^2} P(ikl; i): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是紧算子。

根据定理23<sup>[20]</sup>: 若一个算子等于一个可逆有界的算子与一个紧算子之和, 则称这个算子是指数为0的 Fredholm 算子。因此,  $P(k; \eta): H^{-\frac{3}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial D)$  是指数为0的 Fredholm 算子, 且在  $k \in \mathbb{C}$ , 且  $\operatorname{Re}(k) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(k) \geq 0$  里解析, 得证。

#### 参考文献:

- [1] COSSONNIÈRE A, HADDAR H. Surface integral formulation of the interior transmission problem [J]. J Integral Equ Appl, 2013, 25(3): 341-376.
- [2] BEYN W. An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems [J]. Linear Algebra Appl, 2012, 436(10): 3839-3863.
- [3] CAKONI F, KIRSCH A. On the interior transmission eigenvalue problem [J]. Int J Comput Sci Math, 2010, 3(1/2):

- 142–167.
- [4] MONK P, SUN J. Finite element methods for Maxwell's transmission eigenvalues [J]. *SIAM J Sci Comput*, 2012, 34(3): B247–B264.
- [5] 刘立汉, 崔晓英, 蔡静秋. 基于交互间隙法的内部 Neumann 反散射问题[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2019, 58(1): 149–155.
- [6] 刘立汉, 蔡静秋, 崔晓英. 基于正则的 Newton 迭代法的内部 Neumann 反散射问题[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2019, 58(2): 135–141.
- [7] CAKONI F, GINTIDES D, HADDAR H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues [J]. *SIAM J Math Anal*, 2010, 42(1): 237–255.
- [8] SYLVESTER J. Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators [J]. *SIAM J Math Anal*, 2012, 44(1): 341–354.
- [9] SEROV V, SYLVESTER J. Transmission eigenvalues for degenerate and singular cases [J]. *Inverse Probl*, 2012, 28(6): 065004.
- [10] 张亚林. 逆散射理论中传播特征值问题的若干结果[D]. 天津: 天津大学, 2015.
- [11] COLTON D, LEUNG Y. Complex eigenvalues and the inverse spectral problem for transmission eigenvalues [J]. *Inverse Probl*, 2013, 29(10): 104008.
- [12] ROBBIANO L. Spectral analysis of the interior transmission eigenvalue problem [J]. *Inverse Probl*, 2013, 29(10): 104001.
- [13] PÄIVÄRINTA L, SYLVESTER J. Transmission eigenvalues [J]. *SIAM J Math Anal*, 2008, 40(2): 738–753.
- [14] CAKONI F, HADDAR H, MENG S. Boundary integral equations for the transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations [J]. *J Integral Equ Appl*, 2015, 27(3): 375–406.
- [15] CAKONI F, KRESS R. A boundary integral equation method for the transmission eigenvalue problem [J]. *Appl Anal*, 2017, 96(1): 23–38.
- [16] CAKONI F, YAMAN O, KRESS R, et al. A boundary integral equation for the transmission eigenvalue problem for Maxwell equation [J]. *Math Methods Appl Sci*, 2018, 41(4): 1316–1330.
- [17] LAKSHTANOV E, VAINBERG B. Applications of elliptic operator theory to the isotropic interior transmission eigenvalue problem [J]. *Inverse Probl*, 2013, 29(10): 104003.
- [18] CAKONI F, COLTON D, HADDAR H. On the determination of Dirichlet or transmission eigenvalues from far field data [J]. *Comptes Rendus Math*, 2010, 348(7): 379–383.
- [19] KIRSCH A, LECHLEITER A. The inside–outside duality for scattering problems by inhomogeneous media [J]. *Inverse Probl*, 2013, 29(10): 104011.
- [20] MCLEAN W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [21] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2013.
- [22] KRESS R. Integral equations [M]. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2014.
- [23] TAYLOR M. Partial differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

(责任编辑 冯兆永)